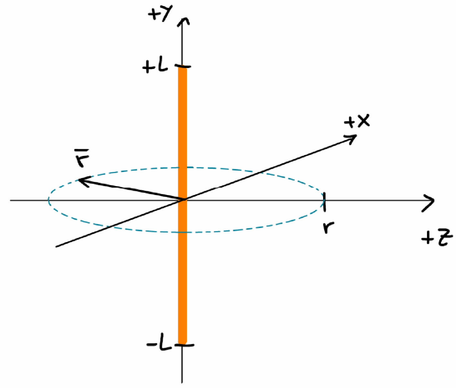
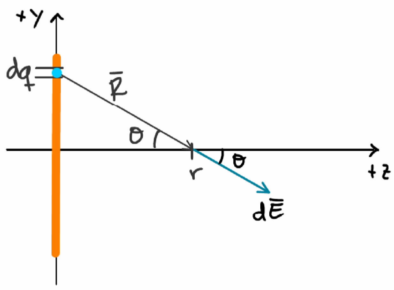
3. Dado un cable delgado de longitud 2L y carga eléctrica por unidad de longitud, λ, calcular el campo eléctrico creado por el cable a una distancia r perpendicular al punto medio del cable. Calcular el campo eléctrico si el cable tiene longitud infinita.



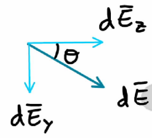
$2L$
λ
r

- El conjunto de puntos que se encuentran a una distancia r perpendicular al punto medio del cable forman una circunferencia contenida en el plano xz y con centro en la posición del cable.
- Debido a la simetría del cuerpo, el valor del campo eléctrico será el mismo en cualquier punto de dicha circunferencia.
    - Conocido el campo en un punto de la circunferencia, conocemos el campo en todos los demás.
    - Calculamos el campo en el punto $P = (0, 0, r)$

El campo E generado por todo el cable en el punto P es igual a la suma de los campos E generados por todos y cada uno de los elementos inifinitesimales del cable sobre P.



$dq = \lambda\, dy$



Además, por la simetría del cable, la suma de las componentes dE_y del campo eléctrico en el eje y será cero $\Rightarrow E_y = 0 \Rightarrow \bar{E} = E_z\hat{k}$
Así pues, sólo tenemos que calcular la componente z del campo eléctrico.
Para simplificar el proceso, calculamos el módulo de E_z.

$$dE_z = dE\cos(\theta)$$

$$dE = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{R^2}$$

$$dE_z = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{R^2}\cos(\theta)$$

Puesto que tendremos que sumar el aporte al campo total de cada infinitesimal, habrá que hacer una integral.
La forma más sencilla de hacerlo, es poner todas las variables en función de y para después integrar entre los extremos del cable.

$$dq = \lambda\, dy$$

$$R^2 = r^2 + y^2$$

$$\cos(\theta) = \frac{r}{R} = \frac{r}{(r^2+y^2)^{1/2}}$$

$$dE_z = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda\, dy}{r^2+y^2}\frac{r}{(r^2+y^2)^{1/2}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda r}{(r^2+y^2)^{3/2}}dy$$

$$\int_0^{E_z} dE_z = \int_{-L}^{+L}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda r}{(r^2+y^2)^{3/2}}dy;$$

$$E_z - 0 = \frac{\lambda r}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-L}^{+L}\frac{1}{(r^2+y^2)^{3/2}}dy;$$

$$E_z = \frac{\lambda r}{4\pi\varepsilon_0}\underbrace{\int_{-L}^{+L}\frac{1}{(r^2+y^2)^{3/2}}dy}_{A}; \qquad (1)$$

Para resolver la integral A hay dos opciones:
1. Saber de memoria el resultado.
2. Pensar si mediante manipulaciones matemáticas podemos convertir nuestra integral en otra equivalente que sepamos resolver o que conozcamos de memoria su resultado.
    - Normalmente, este tipo de integrales se suelen transformar en integrales trigonométricas.

$$1.\quad \int\frac{1}{(x^2+a^2)^{3/2}}dx = \frac{x}{a^2(x^2+a^2)^{1/2}}$$

$$\hookrightarrow A = \int\frac{1}{(r^2+y^2)^{3/2}}dy = \int\frac{1}{(y^2+r^2)^{3/2}}dy = \frac{y}{r^2(y^2+r^2)^{1/2}}$$

2. Puesto que el argumento que hay en el paréntesis tiene una constante más una variable elevada al cuadrado, vamos intentar que el argumento del paréntesis quede de la forma:

$$r^2+y^2 \longrightarrow 1+tg^2(u) \longrightarrow 1+tg^2(u) = \frac{1}{\cos^2(u)}$$

$$A=\int \frac{1}{(r^2+y^2)^{3/2}}\,dy = \int \frac{1}{\left[r^2\left(1+\frac{y^2}{r^2}\right)\right]^{3/2}}\,dy = \frac{1}{r^3}\int \frac{1}{\left(1+\frac{y^2}{r^2}\right)^{3/2}}\,dy\,; \quad \begin{cases} tg(u)=\frac{y}{r} \\ y=r\,tg(u) \rightarrow dy=\frac{r}{\cos^2(u)}\,du \end{cases}$$

$$A=\frac{1}{r^3}\int \frac{1}{(1+tg^2(u))^{3/2}}\frac{r}{\cos^2(u)}\,du = \frac{1}{r^2}\int \frac{1}{\left(\frac{1}{\cos^2(u)}\right)^{3/2}}\frac{1}{\cos^2(u)}\,du = \frac{1}{r^2}\int (\cos^2(u))^{3/2}\frac{1}{\cos^2(u)}\,du =$$

$$= \frac{1}{r^2}\int \cos^3(u)\frac{1}{\cos^2(u)}\,du = \frac{1}{r^2}\int \cos(u)\,du$$

{ Resolvemos esta integral sencilla. Ponemos unos límites genéricos a la integral

$$A=\frac{1}{r^2}\int_{u_i}^{u_f}\cos(u)\,du = \frac{1}{r^2}\sin(u)\Big|_{u_i}^{u_f}$$

{ Ahora hay dos opciones:
- Aplicar el cambio de variable a los límites.
- * Deshacer el cambio de variable.

Para deshacer el cambio de variable, tenemos que intentar expresar el seno como función de la tangente. Por trigonometría sabemos que:

$$\sin^2(u)=\frac{1}{1+cotg^2(u)}\,;$$

$$\sin(u)=\left(\frac{1}{1+cotg^2(u)}\right)^{1/2}$$

$$\sin(u)=\left(\frac{1}{1+\frac{1}{tg^2(u)}}\right)^{1/2}$$

$$\sin^2(u)+\cos^2(u)=1\,;$$

$$\sin^2(u)+\frac{\sin^2(u)}{tg^2(u)}=1\,;$$

$$\sin^2(u)\left(1+\frac{1}{tg^2(u)}\right)=1\,;$$

$$\sin(u)=\left[\frac{1}{1+\frac{1}{tg^2(u)}}\right]^{1/2}.$$

Por lo que:

$$A=\frac{1}{r^2}\sin(u)\Big|_{u_i}^{u_f} = \frac{1}{r^2}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{tg^2(u)}}\right)^{1/2}\Bigg|_{u_i}^{u_f} \quad \begin{cases} tg(u)=\frac{y}{r} \\ y=r\,tg(u) \rightarrow dy=\frac{r}{\cos^2(u)}\,du \end{cases}$$

$$A=\frac{1}{r^2}\left(\frac{1}{1+\frac{r^2}{y^2}}\right)^{1/2}\Bigg|_{y_i}^{y_f} = \frac{1}{r^2}\left(\frac{y^2}{y^2+r^2}\right)^{1/2}\Bigg|_{y_i}^{y_f}$$

$$A=\frac{1}{r^2}\frac{y}{(y^2+r^2)^{1/2}}\Bigg|_{y_i}^{y_f}$$

(Vemos que ambas formas de resolver la integral son equivalentes.)

Sustituimos el resultado en la ecuación (1):

$$E_z=\frac{\lambda r}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-L}^{+L}\frac{1}{(r^2+y^2)^{3/2}}\,dy = \frac{\lambda r}{4\pi\varepsilon_0}A = \frac{\lambda r}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}\frac{y}{(y^2+r^2)^{1/2}}\Bigg|_{y_i=-L}^{y_f=+L} =$$

$$=\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 r}\left[\frac{L}{(L^2+r^2)^{1/2}} - \frac{-L}{((-L)^2+r^2)^{1/2}}\right] = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 r}\frac{2L}{(L^2+r^2)^{1/2}}\,;$$

$$E_z=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\frac{L}{r(L^2+r^2)^{1/2}}$$

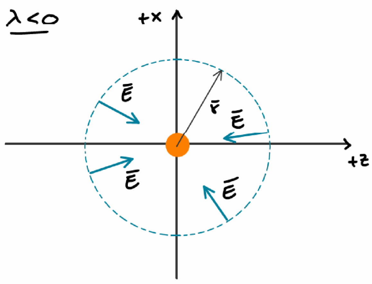
Así, el campo eléctrico generado por el cable sobre el eje z es:

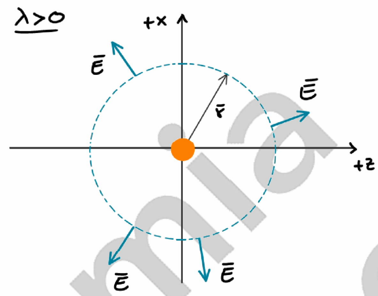
$$\bar{E} = E_z \hat{k} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \frac{L}{r(L^2+r^2)^{1/2}} \hat{k}$$

Pero recordemos que el valor del campo es el mismo para cualquier punto sobre la circunferencia de radio r. Por tanto, podemos expresar el campo de la siguiente manera:

$$\boxed{\bar{E} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \frac{L}{r(L^2+r^2)^{1/2}} \hat{r}}$$

En esta expresión se puede observar que la dirección del campo eléctrico dependerá del signo de la carga:
- El campo apuntará en dirección al cable si $\lambda < 0$.
- El campo apuntará en dirección opuesta al cable si $\lambda > 0$.





CÁLCULO DEL CAMPO GENERADO POR UN CABLE DE LONGITUD INFINITA.

Podemos calcularlo de dos formas:

1. Ahora que conocemos el valor del campo eléctrico para un valor arbitrario de L, resulta sencillo calcular el campo para un cable de longitud infinita:

$$\lim_{L\to\infty} E(L) = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{r}$$

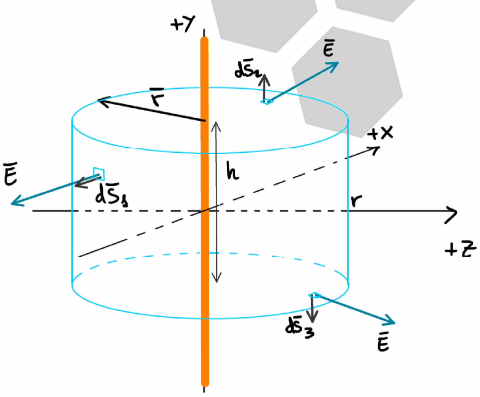
$$E_\infty = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{r} \longrightarrow \boxed{\bar{E}_\infty = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{r} \hat{r}}$$

Nuevamente, la dirección del campo dependerá del signo de la carga.

2. Podemos aplicar la ley de Gauss:

$$\Phi_{neto} = \oint_S \bar{E} \cdot d\bar{S} = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}$$

Tomamos como superficie gaussiana una superficie cilíndrica en torno al cable y calculamos el flujo de campo a través de cada una de las superficies.
- Hay que tener en cuenta que por la simetría del cable, $\bar{E}$ siempre tendrá dirección radial y estará contenido en planos paralelos al plano xz.



$$\Phi = \oint_S \bar{E} d\bar{S} = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0};$$

$$d\bar{E} \perp d\bar{S}_3 \qquad \bar{E} \parallel d\bar{S}_1$$

$$\oint_S \bar{E} d\bar{S} = \int_{S_1} \bar{E} d\bar{S}_1 + \underbrace{\int_{S_2} \bar{E} d\bar{S}_2}_{0} + \underbrace{\int_{S_3} \bar{E} d\bar{S}_3}_{0} = \int_{S_1} \bar{E} d\bar{S}_1 =$$

$$= E \int_{S_1} dS_1 = E 2\pi r h$$

$$Q_{int} = \lambda h$$

$$\Phi = E 2\pi r h = \frac{\lambda h}{\epsilon_0};$$

$$E = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{r};$$

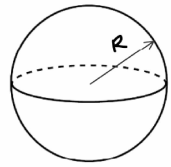
$$\boxed{\bar{E} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{r} \hat{r}}$$

03.3

¿Por qué no aplicamos la ley de Gauss al cálculo del campo eléctrico generado por un cable de longitud finita?

Por un lado, cuando el cable es finito pueden surgir problemas de contorno. Por otro, el campo eléctrico sólo será perpendicular al cable en el plano xz, mientras que en el resto del espacio apuntara en direcciones oblicuas a este plano. Esto implica que sería necesario calcular el campo eléctrico en todos los puntos de la superficie gaussiana, complicando así la resolución.

4. Calcular el campo creado por una esfera hueca conductora con carga Q en los puntos interiores y exteriores de dicha esfera.



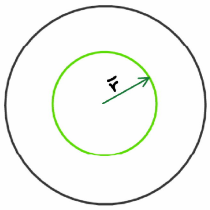
Q

R

Tanto para calcular el campo en el interior como en el exterior podemos aplicar la ley de Gauss:

$$\Phi_{neto} = \oint_S \bar{E} \cdot d\bar{S} = \frac{Q_{int}}{\epsilon_o}$$

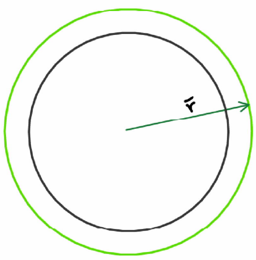
Dentro de la esfera:
Elegimos como superficie gaussiana una esfera de radio $r < R$.



$$\Phi = \oint_S \bar{E}\, d\bar{S} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$$

$$Q_{int} = 0 \Rightarrow \boxed{E_r = 0 \quad \forall\, r < R}$$

Fuera de la esfera:
Elegimos como superficie gaussiana una esfera de radio $r > R$.



$$\Phi = \oint_S \bar{E}\, d\bar{S} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$$

$\bar{E} \parallel d\bar{S}$

$$\oint_S \bar{E}\, d\bar{S} = \oint_S E\, dS = E \oint_S dS = E\, 4\pi r^2$$

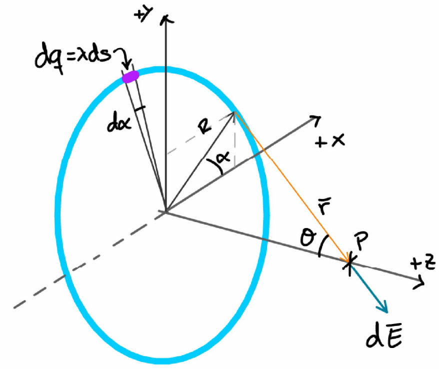
$$Q_{int} = Q$$

$$E\, 4\pi r^2 = \frac{Q}{\varepsilon_0};$$

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{r^2}; \Rightarrow \boxed{\bar{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{r^2}\, \hat{r}}$$

De este resultado se deduce que el campo creado fuera de una distribución de carga esférica y carga total Q es equivalente al campo creado por una partícula puntual de carga Q situada en el centro de dicha esfera.

5. Un conductor en forma de anillo delgado tiene radio R y densidad de carga λ. Calcular el campo eléctrico sobre un eje que atraviesa perpendicularmente el centro del anillo.



R

Q

$P(0,0,z)$

- El campo E generado por todo el anillo en un punto P cualquiera situado sobre el eje que lo atraviesa (eje z) es igual a la suma de los campos E generados por todos y cada uno de los elementos infinitesimales del anillo sobre P.
- Por la simetría cilíndrica de la distribución de las cargas en torno al eje z, las componentes $E_x = E_y = 0$.
  - Por tanto $\bar{E} = E_z \hat{k}$
    - Sólo tenemos que calcular la componente E_z del campo.

$$dE_z = dE\cos(\theta)$$

$$dE = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{r^2}$$

$$dE_z = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{r^2}\cos(\theta)$$

$$dq = \lambda ds$$

$$r^2 = R^2 + z^2$$

$$\cos(\theta) = \frac{z}{r} = \frac{z}{(R^2+z^2)^{1/2}}$$

$$dE_z = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda ds}{R^2+z^2}\frac{z}{(R^2+z^2)^{1/2}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda z}{(R^2+z^2)^{3/2}}ds$$

Puesto que tendremos que sumar el aporte al campo total de cada infinitesimal, habrá que hacer una integral. La forma más sencilla de hacerlo, es poner todas las variables en función del ángulo barrido α sobre la circunferencia para después integrar en el intervalo $\alpha \in [0, 2\pi]$

$$ds = R\,d\alpha$$

$$dE_z = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda z R}{(R^2+z^2)^{3/2}}d\alpha;$$

$$\int_0^{E_z} dE_z = \int_0^{2\pi}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda z R}{(R^2+z^2)^{3/2}}d\alpha;$$

$$E_z - 0 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda z R}{(R^2+z^2)^{3/2}}\int_0^{2\pi}d\alpha = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda z R}{(R^2+z^2)^{3/2}}(2\pi - 0)$$

$$E_z = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda 2\pi R z}{(R^2+z^2)^{3/2}} \Rightarrow \bar{E} = E_z\hat{k};$$

$$\boxed{\bar{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda 2\pi R z}{(R^2+z^2)^{3/2}}\hat{k}}$$

$$(\lambda 2\pi R = Q_{TOTAL})$$

Se puede observar que la dirección del campo eléctrico dependerá del signo de la carga:

- El campo apuntará en dirección al centro del anillo si $\lambda < 0$.
- El campo apuntará en dirección opuesta al centro del anillo si $\lambda > 0$.

Ahora vamos a ver tres casos extremos:

1. Si el punto P lo situamos justo en el centro del anillo $P = (0,0,0)$.
2. Si el punto P lo situamos a una distancia mucho mayor que el radio del anillo $P = (0,0,z) | z \gg R$.
3. Si el punto P lo situamos a una distancia infinita $P = (0,0,z) | z \to \infty$.

1. $$\bar{E}(0,0,0) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda 2\pi R z}{(R^2+z^2)^{3/2}}\hat{k} = 0$$

2. $$\bar{E}(0,0,z) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda 2\pi R z}{(R^2+z^2)^{3/2}}\hat{k}$$

$$(R^2+z^2)^{3/2} \simeq z^3$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda 2\pi R z}{z^3}\hat{k} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda 2\pi R}{z^2}\hat{k} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_T}{z^2}\hat{k}$$

El resultado es equivalente a tener una carga puntual en el centro del anillo con una carga igual a la carga total del anillo.

3. $$\lim_{z\to\infty} \bar{E} = 0$$

Este resultado tiene sentido si consideramos que la intensidad de campo decae conforme nos alejamos de la carga que lo genera.

Vemos, por tanto, que la expresión obtenida para el campo eléctrico generada por un anillo cargado da resultados coherentes.