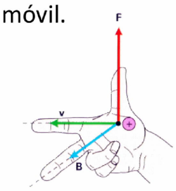
Fuerza magnética sobre una carga móvil.
- $\bar{F} = q\bar{v} \times \bar{B}$
- Regla de la mano derecha.
- Signo de la carga.

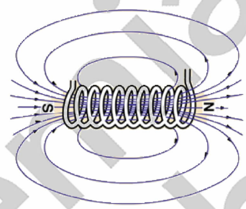


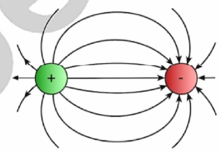
Fuerza de Lorentz.
- Fuerza ejercida por un campo e.m.
- $\bar{F} = q\bar{E} + q\bar{v} \times \bar{B}$

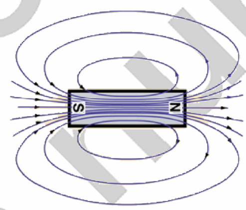
Campo magnético creado por una carga móvil.
- $\bar{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q\bar{v} \times \hat{r}}{r^2}$

Ley de Biot-Savart.
- $d\bar{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\bar{l} \times \hat{r}}{r^2}$

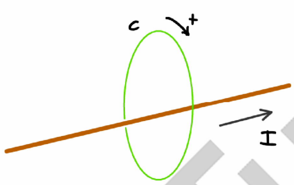
Ley de Gauss.
- $\Phi_{magnético\ neto} = \oint_S \bar{B} \cdot d\bar{S} = 0$
- No existen monopolos magnéticos.



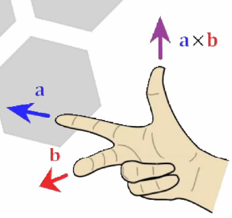


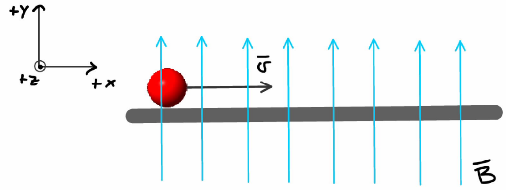


Ley de Ampère.
- $\oint_C B_t dl = \oint_C \bar{B} \times d\bar{l} = \mu_0 I_C$



Producto vectorial.
- $\bar{a} \times \bar{b} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$
- $|\bar{a} \times \bar{b}| = ab \sin(\theta_{ab})$





1. Una partícula con carga Q se encuentra en reposo sobre un plano horizontal. Si a la partícula le aplicamos una velocidad constante $\bar{v}$ paralela al plano y a dicho plano le aplicamos perpendicularmente un campo magnético $\bar{B}$:
   a. Describir el movimiento de la partícula en función de su masa, su carga y de la intensidad del campo magnético.
   b. Determinar qué sucederá si a la partícula le aplicamos una velocidad constante con dirección no paralela al plano horizontal.

Q
$\bar{v} = v\hat{\imath}$
$\bar{B} = B\hat{\jmath}$
m

a)
- Tenemos una partícula cargada en un campo.
  - Fuerza de Lorentz.
- Tenemos campo magnético pero no campo eléctrico.
- Una fuerza neta distinta de cero sobre una partícula implica que la partícula se ve sometida a una aceleración que modifica su vector velocidad.

Calculamos la fuerza ejercida por el campo magnético sobre la carga en el instante inicial en el que la carga penetra en el campo:

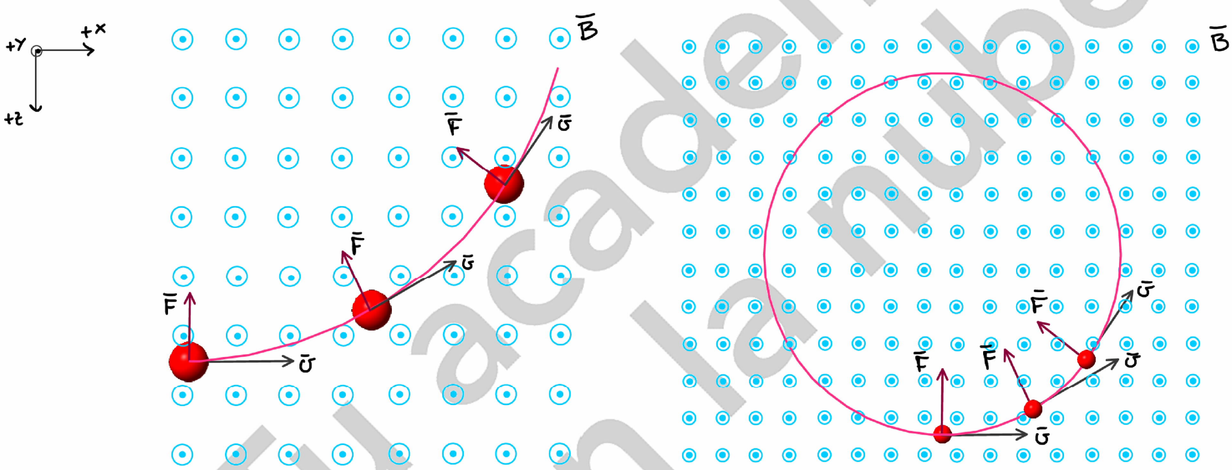
$$\bar{F} = q(\bar{E} + \bar{v} \times \bar{B})$$

$$\left.\begin{array}{l} \bar{E} = 0 \\ \bar{v} = v\hat{\imath} \\ \bar{B} = B\hat{\jmath} \end{array}\right\} \quad \bar{v} \times \bar{B} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ v & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \end{vmatrix} = (0-0)\hat{\imath} + (0-0)\hat{\jmath} + (vB-0)\hat{k} = vB\hat{k}$$

$$\bar{F} = qvB\hat{k}$$

El vector fuerza apuntará en la dirección del eje z y su sentido será:
- $+z$ si la carga es positiva.
- $-z$ si la carga es negativa.

Supongamos por un momento que $Q < 0$. Si observáramos el plano xz de nuestro sistema desde arriba, veríamos lo siguiente:



Es decir, que el campo magnético genera una fuerza que hace que la partícula tenga continuamente aceleración perpendicular al vector velocidad, obligando a la partícula a realizar una trayectoria curva.

Puesto que el campo magnético es constante a lo largo del tiempo y homogéneo en el espacio y que el módulo de la velocidad no varía (debido a que la fuerza es perpendicular a la velocidad), el resultado es una fuerza de módulo constante cuya dirección, siempre perpendicular a la velocidad, obliga a la carga a trazar un movimiento circular uniforme.
Calculamos el radio de este MCU:

$$a_c = \frac{v^2}{R};$$

$$R = \frac{v^2}{a_c}$$

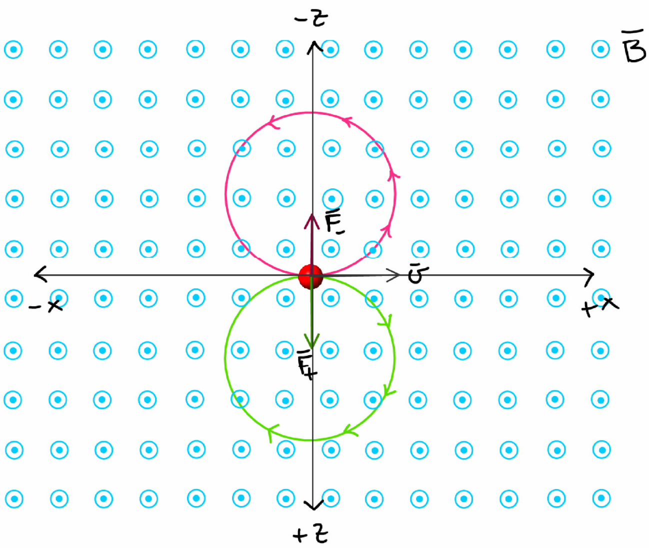
$$a_c = \frac{F}{m} = \frac{|q\bar{v}\times\bar{B}|}{m} = \frac{qvB}{m}$$

$$R = \frac{v^2 m}{qvB};$$

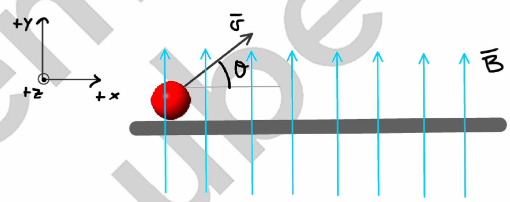
$$\boxed{R = \frac{vm}{qB}}$$

En resumen, una partícula con carga Q, masa m y velocidad inicial $\bar{v}$ que se ve repentinamente sometida a un campo magnético $\bar{B}$ constante, homogéneo, isótropo y perpendicular a $\bar{v}$, pasará a tener un MCU de radio R dado por la expresión anterior.

Por otro lado, suponiendo que la posición inicial de la partícula coincida con el origen de coordenadas, la trayectoria circular se dará en el semiplano xz con $z < 0$ si la carga es negativa o en el semiplano xz con $z > 0$ si la carga es positiva.



b) Para entender qué sucederá en este caso, tenemos que tener en cuenta que la velocidad no es perpendicular al campo magnético.



El problema se puede resolver de dos formas:
- Por componentes en el sistema de coordenadas.
- De forma vectorial.

* Por componentes en el sistema coordenado.

$$\bar{v} = v\cos(\theta)\,\hat{i} + v\sin(\theta)\,\hat{j}$$

$$x: \quad \bar{F}_1 = q\,v\cos(\theta)\,\hat{i} \times B\,\hat{j}$$

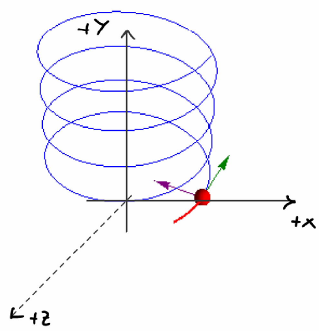
$$\bar{F}_1 = q\,v\cos(\theta)\,B\,\hat{k}$$

$$y: \quad \bar{F}_2 = q\,v\sin(\theta)\,\hat{j} \times B\,\hat{j}$$

$$\bar{F}_2 = 0$$

Por tanto, la partícula tendrá un MCU en el plano xz al mismo tiempo que un MRU en el eje y con velocidad $v_y = v\sin(\theta)$. La composición de estos dos movimientos da lugar a una trayectoria en espiral ascendente en el sentido $+y$ que se denomina helicoide.
El radio del MCU será:

$$R = \frac{v\cos(\theta)\,m}{qB}$$



Este valor del radio es menor que el del apartado anterior ya que la componente de la velocidad perpendicular al campo magnético también lo es.

Como en el caso anterior, el sentido de giro de la trayectoria circular dependerá del signo de la carga.

* De forma vectorial:

Calculamos la fuerza ejercida por el campo magnético sobre la carga en el instante inicial en el que la carga penetra en el campo:

$$\bar{F} = q\,\bar{v} \times \bar{B}$$

$$\left.\begin{array}{l} \bar{v} = v\cos(\theta)\,\hat{i} + v\sin(\theta)\,\hat{j} \\ \bar{B} = B\,\hat{j} \end{array}\right\} \quad \bar{v} \times \bar{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ v\cos(\theta) & v\sin(\theta) & 0 \\ 0 & B & 0 \end{vmatrix} = \dots = 0\,\hat{i} + 0\,\hat{j} + Bv\cos(\theta)\,\hat{k} = Bv\cos(\theta)\,\hat{k}$$

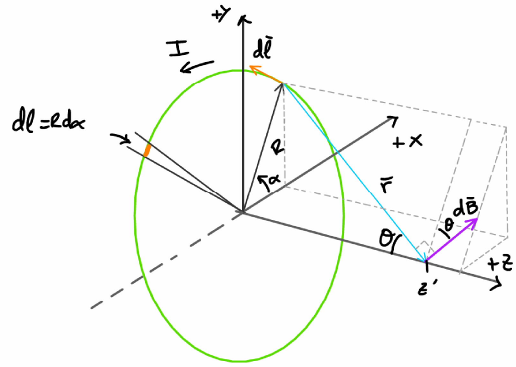
$$\downarrow$$

$$\bar{F} = q\,v\cos(\theta)\,B\,\hat{k}$$

Lo que da lugar a un MCU en el plano xz, mientras que en el eje y tenemos un MRU con velocidad $v_y = v\sin(\theta)$.

Nota: este problema se puede resolver de forma más rigurosa y sencilla utilizando coordenadas cilíndricas.

2. Calcular el campo magnético creado por una espira circular de radio R por la que circula una corriente de intensidad I:
   a. En un punto a una distancia z' perpendicular al centro de la espira.
   b. En el centro de la espira.



R

I

z'

- El campo B generado por todo el anillo en un punto z' cualquiera situado sobre el eje que lo atraviesa (eje z) es igual a la suma de los campos B generados por todos y cada uno de los elementos inifinitesimales del anillo sobre z'.
- Por la simetría cilíndrica de la espira en torno al eje z, las componentes $B_x = B_y = 0$.
  - Por tanto $\bar{B} = B_z\,\hat{k}$
    - Sólo tenemos que calcular la componente B_z del campo.

$$dB_z = dB \sin(\theta)$$

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I|d\bar{l}\times\hat{r}|}{r^2} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\,dl}{r^2} \qquad (d\bar{l}\perp\hat{r})$$

$$dB_z = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I}{r^2}\sin(\theta)\,dl$$

$$r^2 = R^2 + z'^2$$

$$\sin(\theta) = \frac{R}{(R^2+z'^2)^{1/2}}$$

$$dl = R\,d\alpha$$

$$dB_z = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I}{R^2+z'^2}\frac{R}{(R^2+z'^2)^{1/2}}R\,d\alpha;$$

$$dB_z = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{IR^2}{(R^2+z'^2)^{3/2}}d\alpha;$$

$$\int_0^{B_z} dB_z = \int_0^{2\pi}\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{IR^2}{(R^2+z'^2)^{3/2}}d\alpha;$$

$$B_z = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{IR^2}{(R^2+z'^2)^{3/2}}\int_0^{2\pi}d\alpha;$$

$$B_z = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{IR^2}{(R^2+z'^2)^{3/2}}2\pi \Longrightarrow \bar{B} = B_z\hat{k};$$

$$\boxed{\bar{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{2\pi IR^2}{(R^2+z'^2)^{3/2}}\hat{k}}$$

Se puede observar que la dirección del campo magnético dependerá del sentido de circulación de la corriente. A partir del supuesto inicial para la dirección en la que corre la corriente:
- El campo apuntará en dirección al centro del anillo si $I < 0$.
- El campo apuntará en dirección opuesta al centro del anillo si $I > 0$.

Por otra parte, del resultado se deduce que cuanto mayor sea la distancia y mayor sea el radio del anillo, menor será el campo y cuanto mayor sea la corriente, mayor será el campo.

b)

Evaluamos la expresión anterior en $z' = 0$, lo que corresponde con el centro de la espira:

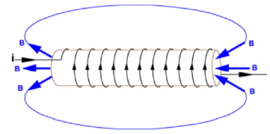
$$\bar{B}(z'=0) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{2\pi IR^2}{(R^2)^{3/2}};$$

$$\boxed{\bar{B}(z'=0) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{2\pi I}{R}}$$

Nota: un ejercicio equivalente sería aquel en el que, en lugar de tener una espira con una corriente, tenemos una espira con carga eléctrica a la que hacemos girar.

03

3. Calcular el campo magnético creado por un solenoide recto de N espiras circulares de radio R y longitud L en un punto del eje de revolución. Suponer $L \gg R$.

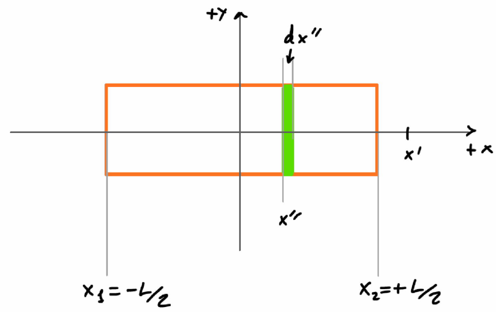


N

R

L

- El campo B generado por un solenoide de N espiras en un punto del eje de revolución es igual a la suma de los campos B generados por todos y cada uno de los elementos infinitesimales dx'' que forman el solenoide.
  - Por cada uno de estos elementos de solenoide circula una intensidad de corriente di.
    - Teniendo en cuenta que por cada espira circula una corriente I y que en un elemento infinitesimal de solenoide tenemos $ndx'' = \frac{N}{L}dx''$ espiras podemos llegar a la conclusión de que la intensidad de corriente que circula por un elemento de solenoide es: $di = Indx''$
- Por la simetría cilíndrica del solenoide en torno al eje x, las componentes $B_y = B_z = 0$.
  - Por tanto $\bar{B} = B_x\,\hat{\imath}$
    - Sólo tenemos que calcular la componente B_x del campo.
- Partimos de la expresión del campo magnético generado por una espira sobre su eje de revolución.



$$dB_x = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{2\pi R^2}{[R^2+(x'-x'')^2]^{3/2}}\,di$$

$$di = I\frac{N}{L}dx''$$

$$dB_x = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{2\pi R^2}{[R^2+(x'-x'')^2]^{3/2}}\,I\frac{N}{L}dx'';$$

x' es la posición del punto del eje en el que queremos calcular el campo.
x'' es la posición del elemento de solenoide dx' que genera el campo.
$x' - x''$ es la distancia entre el elemento de solenoide y el punto en que queremos calcular el campo.

$$\int_0^{B_x} dB_x = \int_{x_1}^{x_2}\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{2\pi R^2}{[R^2+(x'-x'')^2]^{3/2}}\,I\frac{N}{L}dx'';$$

$$B_x = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{2\pi R^2 IN}{L}\int_{x_1}^{x_2}\frac{1}{[R^2+(x'-x'')^2]^{3/2}}dx''$$

Este signo aparece al hacer el cambio de variable en la resolución de la integral.

$$\begin{cases} x'-x'' = R\,\mathrm{tg}\,u \\ dx'' = -R\,\frac{1}{\cos^2(u)} \end{cases}$$

$$\int_{x_1}^{x_2}\frac{1}{[R^2+(x'-x'')^2]^{3/2}}dx'' = \dots = \frac{-1}{R^2}\left.\frac{x'-x''}{[R^2+(x'-x'')^2]^{1/2}}\right|_{x_1}^{x_2} = \dots =$$

$$= \frac{1}{R^2}\left(\frac{x'-x_1}{[R^2+(x'-x_1)^2]^{1/2}} - \frac{x'-x_2}{[R^2+(x'-x_2)^2]^{1/2}}\right)$$

$$B_x = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{2\pi R^2 IN}{L}\frac{1}{R^2}\left(\frac{x'-x_1}{[R^2+(x'-x_1)^2]^{1/2}} - \frac{x'-x_2}{[R^2+(x'-x_2)^2]^{1/2}}\right);$$

$$B_x = \frac{\mu_0}{2}\frac{IN}{L}\left(\frac{x'-x_1}{[R^2+(x'-x_1)^2]^{1/2}} - \frac{x'-x_2}{[R^2+(x'-x_2)^2]^{1/2}}\right);$$

Por tanto, el campo magnético en un punto cualquiera del eje de revolución es:

$$\bar{B} = B_x\,\hat{\imath}$$

$$\boxed{\bar{B} = \frac{\mu_0}{2}\frac{IN}{L}\left(\frac{x'-x_1}{[R^2+(x'-x_1)^2]^{1/2}} - \frac{x'-x_2}{[R^2+(x'-x_2)^2]^{1/2}}\right)\hat{\imath}}$$

Para un solenoide como el planteado en el que se cumple que $L \gg R$ y para un punto en el interior del solenoide y alejado de los extremos, el campo será:

$$\bar{B} = \frac{\mu_0}{2}\frac{IN}{L}\left(\frac{x'-x_1}{[R^2+(x'-x_1)^2]^{1/2}} - \frac{x'-x_2}{[R^2+(x'-x_2)^2]^{1/2}}\right)\hat{\imath}\,\Bigg|_{\substack{L\gg R \\ x_1=-L/2 \\ x_2=+L/2 \\ -\frac{L}{2} \ll x' \ll +\frac{L}{2} \Rightarrow x'\simeq 0}}$$

$$\bar{B} = \frac{\mu_0}{2}\frac{IN}{L}(1+1)\,\hat{\imath};$$

$$\boxed{\bar{B} = \mu_0 I\frac{N}{L}\,\hat{\imath}}$$

Este tipo de solenoides en los que $L \gg R$ se dice que son solenoides largos o infinitos.

03.1

Para un solenoide como el planteado en el que se cumple que $L \gg R$ y para un punto en el extremo del solenoide:

$$\bar{B} = \frac{\mu_0}{2}\frac{IN}{L}\left(\frac{x'-x_1}{[R^2+(x'-x_1)^2]^{1/2}} - \frac{x'-x_2}{[R^2+(x'-x_2)^2]^{1/2}}\right)\hat{\imath}\,\Bigg|_{\substack{L\gg R\\ x_1=-L/2\\ x_2=+L/2\\ x'=\pm L/2}}$$

$$\bar{B} = \frac{\mu_0}{2}\frac{IN}{L}\frac{L}{(R^2+L^2)^{1/2}}\hat{\imath}$$

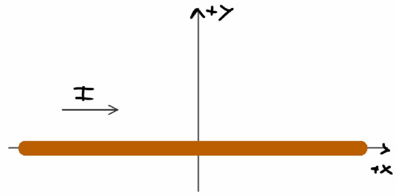
$$\frac{L}{(R^2+L^2)^{1/2}} \simeq 1.$$

$$\boxed{\bar{B} = \frac{1}{2}\mu_0 I \frac{N}{L}\hat{\imath}}$$

Es decir, que el campo en los extremos del solenoide es aproximadamente igual al valor del campo en las zonas del interior del solenoide alejadas de los extremos.

04

4. Un conductor cilíndrico, macizo, de radio R y longitud $L \gg R$ transporta una corriente I distribuída uniformemente en todo su área transversal. Calcular el campo magnético en todo el espacio.

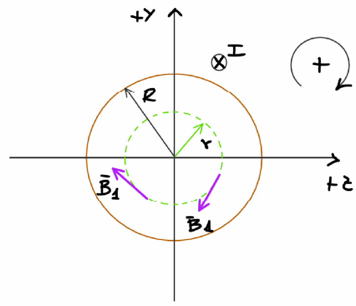


R

L

I

- Debido al alto grado de simetría del cuerpo, para calcular el campo magnético vamos a aplicar la ley de Ampère.
  - Tomaremos como camino cerrado una circunferencia coaxial al cilindro.
- Para facilitar los cálculos, vamos a considerar dos zonas del espacio:
  1. $r \leq R$
  2. $R \leq r$



1. $r \leq R$:

$$\oint_C \bar{B} \cdot d\bar{l} = \mu_0 I_C$$

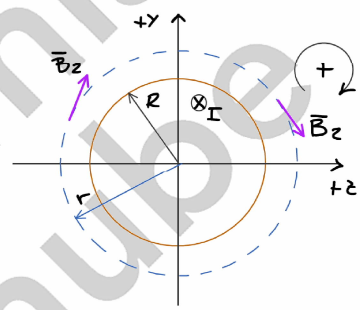
$$\oint_C \bar{B} \cdot d\bar{l} = \oint_C B_1 dl = B_1 \oint_C dl = B_1 2\pi r$$

$$I_C = \sigma_I S_C = \frac{I}{S} S_C = \frac{I}{\pi R^2} \pi r^2 = I \frac{r^2}{R^2}$$

$$B_1 2\pi r = \mu_0 I \frac{r^2}{R^2};$$

$$\boxed{B_1 = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I}{R^2} r}$$

2. $R \leq r$:



$$\oint_C \bar{B} \cdot d\bar{l} = \mu_0 I_C$$

$$\oint_C \bar{B} \cdot d\bar{l} = \oint_C B_2 dl = B_2 \oint_C dl = B_2 2\pi r$$

$$I_C = I$$

$$B_2 2\pi r = \mu_0 I;$$

$$\boxed{B_2 = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I}{r}}$$

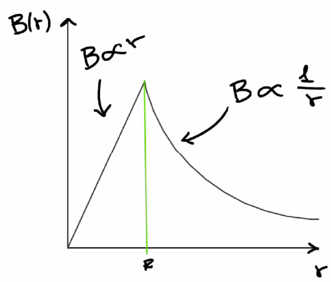
Comprobamos que ambos resultados son iguales cuando $r = R$:

$$B_1(r=R) = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I}{R^2} R = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I}{R} //$$

$$B_2(r=R) = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I}{R} //$$

Así, la función del campo magnético en función de r queda de la siguiente manera:

$$B(r) = \begin{cases} \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I}{R^2} r & r \leq R \\ \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I}{r} & R \leq r \end{cases}$$



En resumen, partiendo del centro del cilindro, el campo magnético irá aumentando linealmente conforme nos acercamos a la superficie y una vez alcanzada, decaerá su intensidad con $1/r$ conforme nos alejemos de la misma.