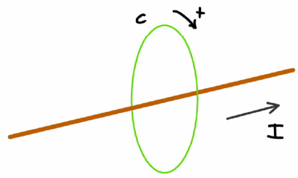
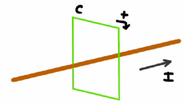
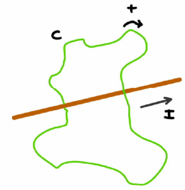
Introducción

Ley de Ampère.

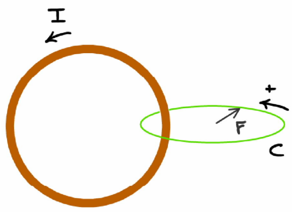
$$\oint_C B_t dl = \oint_C \bar{B} \cdot d\bar{l} = \mu_0 I_C$$



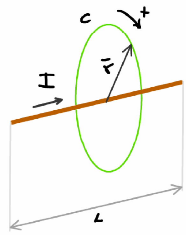




- Se cumple para cualquier curva C siempre y cuando la corriente sea:
  - Estacionaria $I \neq I(t)$.
  - Continua $I \neq I(x)$.
- Es válida tanto si hay simetría como si no la hay.
  - Pero sólo es útil para el cálculo de $\bar{B}$ cuando hay simetría.
- Consecuencias y ejemplos de las limitaciones a la ley de Ampère:



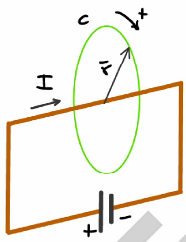
$B_t \neq cte \Rightarrow \oint_C B_t dl$ ↯



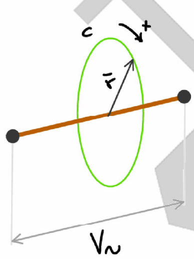
Ampère Biot-Savart

$B = \cancel{\frac{\mu_0}{2\pi}} \frac{I}{r} \neq B(L)$ ↯

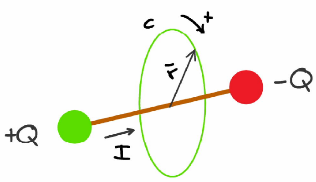
No concuerda con el resultado obtenido por la ley de Biot-Savart ni con lo observado experimentalmente.



La ley de Ampère es válida para la curva C, pero no para calcular el campo magnético debido a todo el circuito sobre un punto de la curva C.



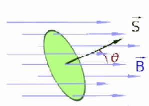
La ley de Ampère no se puede aplicar por que la corriente no es constante en el tiempo.



La ley de Ampère no se puede aplicar por que la corriente no es constante ni en el espacio ni en el tiempo.

Flujo magnético

$$\Phi_m = \int_S \bar{B} \cdot d\bar{S}$$

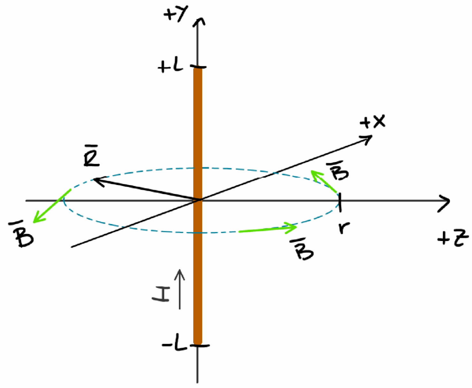


Ley de Faraday

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi_m}{dt}$$

Ley de Lenz

- La fem y la corriente inducidas poseen una dirección y sentido tal que tienden a oponerse a la variación que las produce.
- Cuando se produce una variación del flujo magnético que atraviesa una superficie, el campo magnético debido a la corriente inducida genera un flujo magnético sobre la misma superficie que se opone a dicha variación.

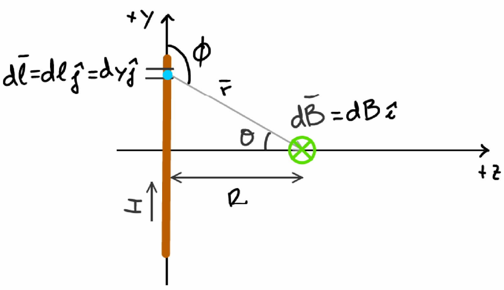


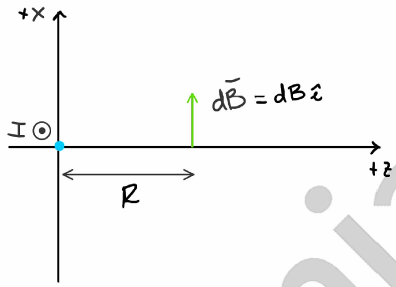
5. Dado un hilo delgado de longitud $2L$ por el que circula una corriente de intensidad I, calcular el campo magnético creado por el hilo a una distancia R perpendicular al punto medio del cable. Calcular el campo magnético si el hilo tiene longitud infinita.

$2L$
I
R

- El conjunto de puntos que se encuentran a una distancia r perpendicular al punto medio del cable forman una circunferencia contenida en el plano xz y con centro en la posición del hilo.
- Conocido el campo en un punto de la circunferencia, conocemos el campo en todos los demás.
  - Según la ley de Biot-Savart, la dirección del campo magnético será tangente a la circunferencia y su sentido vendrá dado por la regla de la mano derecha.
  - Debido a la simetría del cuerpo, la magnitud del campo magnético será la misma en cualquier punto de dicha circunferencia.
  - Calculamos el campo en el punto $P = (0, 0, R)$

El campo B generado por todo el hilo en el punto P es igual a la suma de los campos B generados por todos y cada uno de los elementos infinitesimales del hilo sobre P.





Vemos que, para todo $d\bar{l}$, $d\bar{B}$ es perpendicular al plano yz y apunta en sentido $\hat{\imath}$.
En consecuencia, ya sabemos la dirección y sentido del campo magnético en P, por lo que sólo tenemos que calcular su intensidad en dicho punto.

Aplicamos la ley de Biot-Savart:

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\,|d\bar{l}\times\hat{r}|}{r^2}$$

$$r^2 = R^2 + y^2$$

$$|d\bar{l}\times\hat{r}| = dl\,|\hat{j}\times\hat{r}| = dy\sin(\phi) = dy\cos(\theta) = \frac{R}{r}dy = \frac{R}{(R^2+y^2)^{1/2}}dy$$

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I}{R^2+y^2}\frac{R}{(R^2+y^2)^{1/2}}dy;$$

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{IR}{(R^2+y^2)^{3/2}}dy;$$

$$\int_0^B dB = \int_{-L}^{+L}\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{IR}{(R^2+y^2)^{3/2}}dy;$$

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi}IR\int_{-L}^{+L}\frac{1}{(R^2+y^2)^{3/2}}dy;$$

$$\vdots$$

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi}IR\left.\frac{y}{R^2(y^2+R^2)^{1/2}}\right|_{-L}^{+L};$$

$$\vdots$$

$$\boxed{B = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{2LI}{R(L^2+R^2)^{1/2}}}$$

- Esta expresión nos da la intensidad del campo magnético en función de la distancia al hilo conductor, de la intensidad de la corriente eléctrica y de la longitud del hilo.
  - A mayor intensidad de corriente mayor intensidad de campo y a mayor distancia respecto al hilo, menor intensidad de campo magnético.
  - La determinación de la dependencia de la intensidad de campo magnético con la longitud del hilo no es evidente a simple vista. Sin embargo, si tenemos en cuenta que la corriente tiene la misma dirección y sentido en todo el hilo y que, por tanto, todos los $d\bar{l}$ generan campo magnético sobre el eje z con la misma dirección y sentido, resulta evidente que cuanto más largo sea el cable mayor será la intensidad de campo.
    - Por otra parte, debido a la relación $dB \propto |d\bar{l}\times\hat{r}|$ cuanto más nos alejemos del plano xz más débil será el campo magnético generado por cada $d\bar{l}$ y, en consecuencia es probable que la función $B(L)$ tienda asintóticamente a un valor máximo del campo magnético.
- La dirección del vector campo magnético será tangente a la circunferencia ya mencionada y su sentido vendrá dado por la regla de la mano derecha.

Para calcular el campo debido a un hilo longitudinal infinito, utilizamos la expresión anterior.

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{2LI}{R(L^2+R^2)^{1/2}}$$

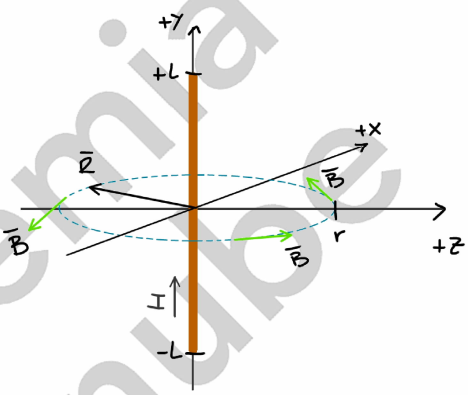
$$B_\infty = \lim_{L\to\infty} B(L) = \lim_{L\to\infty}\left(\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{2LI}{R(L^2+R^2)^{1/2}}\right) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{2I}{R}\underbrace{\lim_{L\to\infty}\left(\frac{L}{(L^2+R^2)^{1/2}}\right)}_{=1};$$

$$\boxed{B_\infty = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{2I}{R}}$$

Vemos que se confirma el planteamiento hecho anteriormente y que la intensidad del campo magnético tiende asintóticamente a un valor concreto de campo magnético.

Ahora vamos a repetir el mismo ejercicio, pero aplicando la ley de Ampère.

Empezamos calculando el campo magnético debido al hilo de longitud L.



$$\oint_c B_t\,dl = \mu_0 I_c$$

$$I_c = I$$
$$B_t = B$$
$$\oint_c B_t\,dl = B\oint_c dl = B2\pi R$$

$$B2\pi R = \mu_0 I;$$

$$\cancel{\boxed{B = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I}{R}}}$$

Vemos que este resultado no coincide con el calculado por integración aplicando la ley de Biot-Savart. En consecuencia, no podemos aplicar la ley de Ampère para calcular el campo magnético generado por un hilo de longitud finita.

La ley de Ampère sería válida en el caso de un hilo de longitud infinita y aproximada en el caso de querer calcular el campo generado por un hilo de longitud L a una distancia R cuando $L \gg R$.
En este caso, el cálculo anterior sería válido:

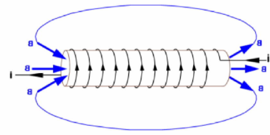
$$\oint_c B_t\,dl = \mu_0 I_c$$

$$I_c = I$$
$$B_t = B$$
$$\oint_c B_t\,dl = B\oint_c dl = B2\pi R$$

$$B2\pi R = \mu_0 I;$$

$$\boxed{B = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I}{R}}$$ ✓✓

06

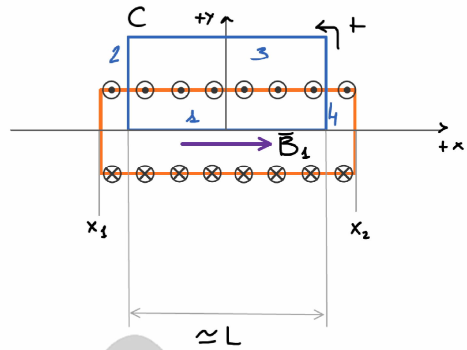


6. Calcular, utilizando la ley de Ampère, el campo magnético creado por un solenoide recto de N espiras circulares de radio R y longitud L, en los siguientes tres puntos del espacio y comparar los resultados con los obtenidos mediante la aplicación de la ley de Biot-Savart:
   a. En un punto interior del solenoide alejado de sus extremos.
   b. En los extremos del solenoide.
   c. Fuera del solenoide.

N
R
L

a) Para poder aplicar la ley de Ampère y simplificar el cálculo tendremos que hacer algunas aproximaciones y elegir un camino cerrado adecuado:
- Supondremos que:
  - El campo en el interior del solenoide es constante a en todos sus puntos excepto en los extremos.
  - El campo en el exterior del solenoide es nulo.
- El camino será rectangular y lo colocaremos de modo que:
  - Dos de sus lados sean perpendiculares al eje de revolución del solenoide y estén alejados de los extremos hacia el interior.
  - Uno de los lados sea paralelo al eje de revolución y se encuentre fuera del solenoide.
  - Uno de los lados sea paralelo al eje de revolución y se encuentre en el interior del solenoide.

En consecuencia de todo lo anterior, el resultado será aproximado pero no exacto.



$$\oint_C \bar{B}\cdot d\bar{l} = \mu_0 I_c$$

$$\oint_C \bar{B}\cdot d\bar{l} = \sum_{i=1}^{4}\int_{C_i}\bar{B}_i\cdot d\bar{l}_i$$

$$\int_1 \bar{B}_1\cdot d\bar{l}_1 = \int_1 B_1\, dl_1 = B_1\int_{-L/2}^{+L/2} dl = B_1 L$$

$$\int_2 \bar{B}_2\cdot d\bar{l}_2 = \int_0^{R/2}\bar{B}_1\cdot d\bar{l}_2 + \int_{R/2}^{R} 0\cdot d\bar{l}_2 = 0$$

(Otra forma de plantearlo es que las líneas de campo en el exterior del solenoide son aproximadamente perpendiculares a los caminos 2 y 4.)

$$\int_3 \bar{B}_3\cdot d\bar{l}_3 = 0$$

$$\int_4 \bar{B}_4\cdot d\bar{l}_4 = \int_{R/2}^{0}\bar{B}_1\cdot d\bar{l}_2 + \int_{R}^{R/2} 0\cdot d\bar{l}_2 = 0$$

$$\oint_C \bar{B}\cdot dl = B_1 L$$

$$I_c = nLI$$

($n = \frac{N}{L}$ es la densidad de espiras)

$$B_1 L = \mu_0 n L I$$

$$\boxed{B_1 = \mu_0 I n}$$

Este resultado coincide con el obtenido al aplicar la ley de Biot-Savart cuando $L \gg R$, pero en ningún momento hemos dicho que éste sea el caso.

Por otro lado, hemos tenido que hacer muchas suposiciones y aproximaciones, como por ejemplo, que el campo es constante en todos los puntos interiores del solenoide o que el camino elegido contiene todas las espiras del solenoide, al mismo tiempo que decimos que se encuentra alejado de sus extremos, lo cual es contradictorio.

Si no hubiéramos supuesto que el campo es constante en el interior del solenoide y nulo en el exterior, hubiera sido necesario realizar las integrales de los tramos 2, 3 y 4 del camino.
- Las integrales 2 y 4 serían idénticas excepto por el sentido de $d\bar{l}$. En consecuencia, hubieran tenido el mismo valor pero de signo opuesto y se hubieran cancelado mutuamente al sumarlas.
- El cálculo de la integral del tramo 3 se puede simplificar colocando dicho tramo muy lejos del solenoide o hacer tender su posición al infinito de modo que el campo magnético tienda a cero. En consecuencia, esta integral valdría cero.

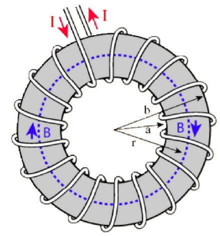
Por otra parte, el resultado obtenido es válido sobre el eje de revolución pero no en cualquier otro punto en el interior del solenoide.

Si, por el contrario, quisiéramos calcular el campo magnético en el interior de un solenoide de longitud infinita o en las zonas alejadas de los extremos en el interior de un solenoide que cumpla que $L \gg R$, la aplicación de la ley de Ampère sería una muy buena aproximación.

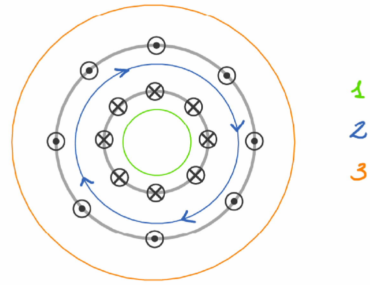
b) c) Para calcular el campo en los extremos del solenoide o fuera de éste, no podemos suponer que el campo se mantiene constante ni en el interior del solenoide ni fuera de este, por lo que $B = B(\bar{r})$. En consecuencia realizar la integral del campo sobre el camino cerrado se vuelve muy complicada y necesitamos conocer el valor del campo en función de la posición para todos los puntos en los extremos del solenoide y fuera de éste.

07

7. Calcular el campo magnético creado por un solenoide toroidal de N espiras circulares en su interior y en su exterior.



Para calcular el campo magnético en las diferentes zonas del espacio vamos a aplicar la ley de Ampère.



Comenzamos con la zona central del toroide (1).

$$\oint_{C_1} \bar{B}\cdot d\bar{l}_1 = \mu_0 I_c$$

$$I_c = 0$$

$$\oint_{C_1} \bar{B}\cdot d\bar{l}_1 = B 2\pi R_1 \quad (R_1 < a)$$

$$B 2\pi R_1 = 0$$

$$\boxed{B = 0}$$

Calculamos ahora el campo en el interior del solenoide (2).

$$\oint_{C_2} \bar{B}\cdot d\bar{l}_2 = \mu_0 I_c$$

$$I_c = NI$$

$$\oint_{C_2} \bar{B}\cdot d\bar{l}_2 = B 2\pi R_2 \quad (a < R_2 < b)$$

En este punto hemos supuesto que la intensidad de campo magnético es constante para todo valor de $R_2 \in (a, b)$, pero en realidad el valor de B decrece conforme aumenta el radio y nos acercamos a b. Esto es así porque la densidad de espiras es mayor en el radio interior y menor en el exterior. Para poder hacer esta aproximación, es necesario suponer que el radio medio del toroide es mucho mayor que el radio de las espiras $\frac{a+b}{2} \gg \frac{b-a}{2}$.

$$B 2\pi R_2 = \mu_0 NI;$$

$$\boxed{B = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{NI}{R_2}}$$

Si tenemos en cuenta que $2\pi R_2$ es el perímetro de nuestro camino, se puede ver que el resultado obtenido es equivalente al campo creado por un solenoide rectilíneo de longitud $2\pi R_2$.

Finalmente calculamos el campo en la zona externa del toroide (3).

$$\oint_{C_3} \bar{B}\cdot d\bar{l}_3 = \mu_0 I_c$$

$$I_c = +NI - NI = 0$$

$$\oint_{C_3} \bar{B}\cdot d\bar{l}_3 = B 2\pi R_3 \quad (b < R_3)$$

$$B 2\pi R_3 = 0$$

$$\boxed{B = 0}$$

Es decir, que el campo magnético se encuentra confinado en el interior del solenoide.