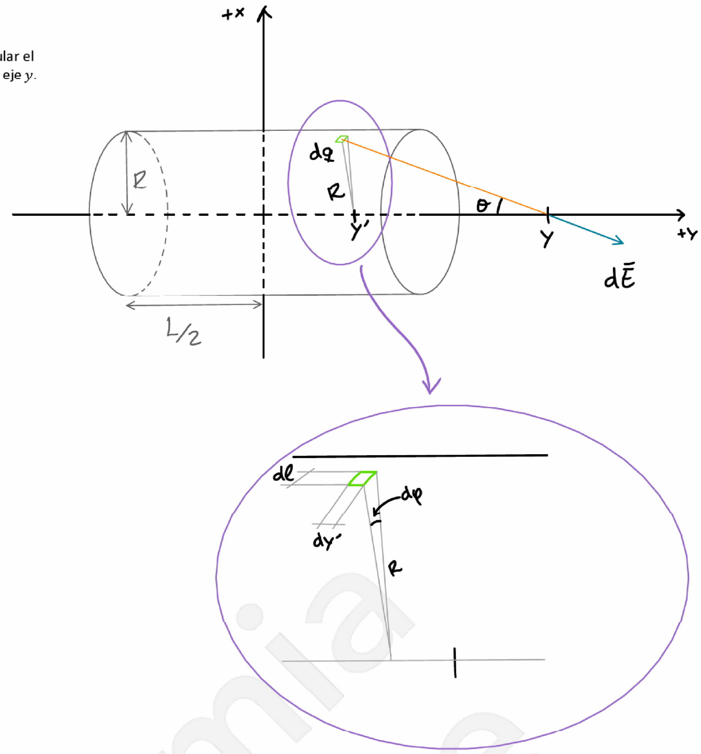
30. Una superficie cilíndrica de radio R y altura L tiene una carga distribuida uniformemente. Calcular el campo eléctrico en cualquier punto de su eje de revolución. Suponer que dicho eje coincide con el eje y.



R
L
σ

- El campo E generado por toda la superficie cilíndrica en un punto y de su eje de revolución es igual a la suma de los campos eléctricos generados por todos y cada uno de los elementos infinitesimales de la superficie cargada sobre y.
- Por la simetría cilíndrica de la distribución de las cargas en torno al eje y, las componentes $E_x = E_z = 0$.
  - Por tanto $\bar{E} = E_y \hat{j}$
    - Sólo tenemos que calcular la componente E_y del campo.
- Por la simetría del cilindro respecto al plano xy:
  - El campo será nulo en el centro del cilindro.
  - El campo tendrá igual módulo pero sentido opuesto para dos valores de y equidistantes respecto al centro del cilindro ($-y$ e y).
    - Nos centramos en calcular el campo sobre el eje y para valores de $0 < y$.
- Aplicamos la ley de Coulomb.

$$dE_y = dE\cos(\theta) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{r^2}\cos(\theta)$$

$$dq = \sigma\, dS = \sigma\, dl\, dy' = \sigma R\, d\varphi\, dy'$$

$$r = \left(R^2 + (y-y')^2\right)^{1/2}$$

$$\cos(\theta) = \frac{(y-y')}{\left(R^2+(y-y')^2\right)^{1/2}}$$

$$dE_y = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\sigma R}{\left(R^2+(y-y')^2\right)}\frac{(y-y')}{\left(R^2+(y-y')^2\right)^{1/2}}\, d\varphi\, dy';$$

$$dE_y = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\sigma R (y-y')}{\left(R^2+(y-y')^2\right)^{3/2}}\, d\varphi\, dy';$$

$$\int_0^{E_y} dE_y = \iint \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\sigma R (y-y')}{\left(R^2+(y-y')^2\right)^{3/2}}\, d\varphi\, dy' = \frac{\sigma R}{4\pi\varepsilon_0}\int_{\varphi=0}^{2\pi} d\varphi \int_{y'=-L/2}^{+L/2}\frac{(y-y')}{\left(R^2+(y-y')^2\right)^{3/2}}\, dy' = \frac{\sigma R}{4\pi\varepsilon_0}2\pi\int_{y'=-L/2}^{+L/2}\frac{(y-y')}{\left(R^2+(y-y')^2\right)^{3/2}}\, dy'$$

$$E_y = \frac{\sigma R}{2\varepsilon_0}\left.\frac{1}{\left(R^2+(y-y')^2\right)^{1/2}}\right|_{-L/2}^{+L/2} = \frac{\sigma R}{2\varepsilon_0}\left(\frac{1}{\left(R^2+(y-\frac{L}{2})^2\right)^{1/2}} - \frac{1}{\left(R^2+(y+\frac{L}{2})^2\right)^{1/2}}\right)$$

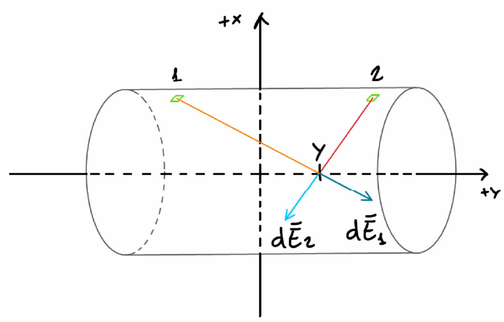
$$E = \frac{\sigma R}{2\varepsilon_0}\left(\frac{1}{\left(R^2+(y-\frac{L}{2})^2\right)^{1/2}} - \frac{1}{\left(R^2+(y+\frac{L}{2})^2\right)^{1/2}}\right)$$

$\bar{E} \parallel \hat{j}$

$E = E(y)$

$$\boxed{\bar{E}(y) = \frac{\sigma R}{2\varepsilon_0}\left(\frac{1}{\left(R^2+(y-\frac{L}{2})^2\right)^{1/2}} - \frac{1}{\left(R^2+(y+\frac{L}{2})^2\right)^{1/2}}\right)\hat{j}}$$

Este es el resultado para el campo cuando $0 < y$. Cuando $y < 0$ el campo será el mismo pero de signo opuesto.
A partir de la expresión anterior se puede deducir que la intensidad del campo será máxima en $y = \frac{L}{2}$ y decrecerá conforme nos alejamos de ese punto, tendiendo a cero cuando $y \to \infty$ y cuando $y \to 0$. Estos resultados son coherentes con un análisis físico del problema planteado.



Nota: cuando el punto y se encuentra fuera del cilindro, todos los elementos de carga crean campo eléctrico en la dirección $+y$. Sin embargo, cuando el punto y se encuentra en el interior del cilindro tendremos una parte de la distribución de carga que generará campo en sentido $+y$, mientras que otra lo hará en sentido $-y$.
En cualquier caso, todo lo anterior va implícito en la integral a través de la expresión del $\cos(\theta)$.